INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

Matemática Aplicada

Nelson Mulemba

Sistema de Coordenadas Cartesianas e Funções(Operações, Limite e Continuidade) - Aplicações Económicas

Maputo, February 26, 2024

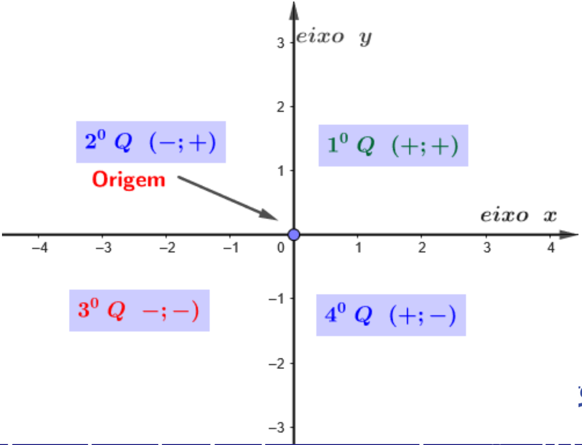
Índice

Sistema de Coordenadas Cartesianas

Assim como é possível representar números reais por meio de pontos em uma recta real, é possível representar pares ordenados de números reais por pontos em um plano denominado **sistema de coordenadas rectangulares** ou **Sistema Cartesiano Ortogonal (SCO)**, assim chamado em homenagem ao matemático francês René Descartes (1596-1650).
O sitema cartesiano é formado pela utilização de duas rectas reais que se cruzam em ângulos retos. A recta real horizontal costuma ser chamada de **eixo** x, e a reta real vertical costuma ser chamada de **eixo** y. O ponto de interseção desses dois eixos é a **origem** e os dois eixos dividem o plano em quatro partes denominadas **quadrantes**.

ISUTC INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

Uma escala numérica é construida ao longo do eixo x, com números positivos à direita da origem e negativos à esquerda. Analogamente, do eixo do y, com números negativos abaixo da origem e positivos acima da origem.



As escalas numéricas em ambos os eixos não precisam ser iguais. Em muitas aplicações, quantidades diferentes são representadas por x e y. Por exemplo, x pode representar o número de celulares vendidos e y o valor total das vendas. Em tais casos é muitas vezes desejável escolher escalas numéricas para representar quantidades diferentes, pois uma unidade de celular (x) pode equivaler a milhares unidades de valor a pagar (y).

Cada ponto no plano corresponde a um par ordenado (x, y) de números reais x e y, chamados **coordenadas** do ponto. A **coordenada** x representa a distância orientada do eixo y até o ponto, e a **coordenada** y representa a distância orientada do eixo x até o ponto.

No par ordenado $(x; y)$, x é denominado **abcissa**, ou **coordenada de** x, y é denominado **ordenada** ou **coordenada de** y, e x e y são denominadas **coordenadas** do ponto **P**, ou $P(x; y)$.

Exemplo

Marque os pontos no SCO $A(1; 0)$; $B(-1.4; 2)$; $C(0; 0)$ *e* $D(2; -3)$

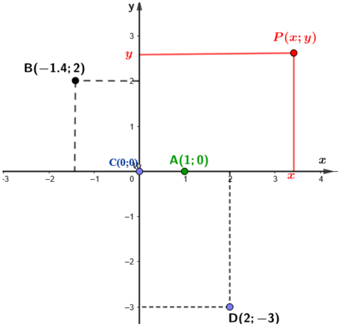
Solução:

No par ordenado $(x; y)$, x é denominado **abcissa**, ou **coordenada de** x, y é denominado **ordenada** ou **coordenada de** y, e x e y são denominadas **coordenadas** do ponto **P**, ou $P(x; y)$.

Exemplo

Marque os pontos no SCO $A(1; 0)$; $B(-1.4; 2)$; $C(0; 0)$ *e* $D(2; -3)$

Solução:



Distância e Ponto Médio

Suponha, que $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ são pontos quaisquer no plano. Então a distância entre esses dois pontos no plano pode ser calculada pela seguinte fórmula:

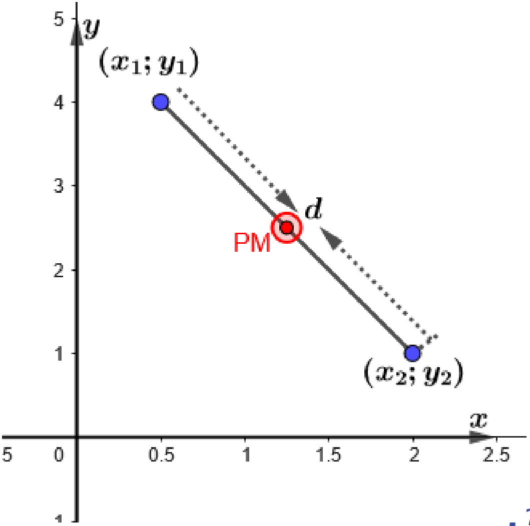
Definição (Fórmula de Distância)

A distância **d** *entre dois pontos* $P_1(x_1; y_1)$ *e* $P_2(x_2; y_2)$ *no plano é dada por* $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

O **ponto médio** do segmento de recta que une dois pontos em um plano coordenado, é determinado pelos valores médios das respectivas coordenadas das duas extremidades.

Definição (Fórmula do ponto médio)

O ponto médio do segmento que une os pontos $(x_1; y_1)$ *e* $(x_2; y_2)$ *é*
Ponto médio$= \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$



5
4
3
2
1
y
x
$(x_1; y_1)$
$(x_2; y_2)$
d
PM
5
0
0.5
1
1.5
2
2.5

Exemplos

Exemplo (Distância)

Determine a distância entre os pontos $(-4;3)$ *e* $(2;6)$

Resolução:

Exemplos

Exemplo (Distância)

Determine a distância entre os pontos $(-4; 3)$ *e* $(2; 6)$

Resolução:
Sendo $P_1(-4; 3)$ e $P_2(2; 6)$ pontos no plano, então temos: $(x_1; y_1) = (-4; 3)$ e $(x_2; y_2) = (2; 6)$. Usando a fórmula de distância, tem-se:

$$d(P_1; P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

$$\sqrt{[2 - (-4)]^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} \approx 6.7$$

A distância entre os pontos é aproximadamente a 6.7 unidades de distância.

Exemplos

Exemplo (Ponto médio)

Localize ou determine o ponto médio do segmento de recta que une os pontos $(-5; -3)$ *e* $(9; 3)$

Resolução:

Exemplos

Exemplo (Ponto médio)

Localize ou determine o ponto médio do segmento de recta que une os pontos $(-5; -3)$ *e* $(9; 3)$

Resolução:
Sejam $(x_1; y_1) = (-5; -3)$ e $(x_2; y_2) = (9; 3)$. Usando a fórmula de ponto médio, tem-se:
Ponto médio

$$P_M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-5+9}{2}; \frac{-3+3}{2}\right) = (2; 0)$$

O ponto médio do segmento de recta é $(2; 0)$.

INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

Exemplos

Exemplo (Ponto médio)

Suponha que, uma empresa teve vendas anuais de 408 milhões Mts em 2003 e 637 milhões Mts em 2005. Sem qualquer informação adicional, determine uma estimativa das vendas em 2004.

Resolução:

Para resolver o problema vamos assumir que as vendas seguiram um padrão linear (recta). Com essa hipótese, pode-se estimar as vendas de 2004 encontrando-se o ponto médio do segmento que une os pontos $(2003; 408)$ e $(2005; 637)$.

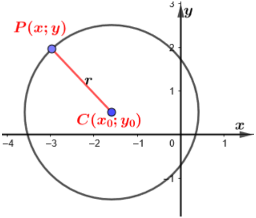
Ponto médio $P_M = \left(\dfrac{2003+2005}{2}; \dfrac{408+637}{2}\right) = (2004; 522.5)$

Podemos estimar que as vendas em 2004 foram de 522.5 milhões de meticais.

A Circunferência

Considere a circunferência mostrada na figura. Um ponto $(x; y)$ está na circunferência se e somente se sua distância a partir do centro $(x_0; y_0)$ for r.

Através do conceito acima de circunferência, a distância do ponto P ao centro é r. Recorrendo a fórmula da distância, temos que: $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$. E elevando ao quadrado ambos membros, tem-se:



Definição (Equação da circunferência)

A equação da circunferência de centro $(x_0; y_0)$ e raio r é dada por
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Exemplo

Exemplo

O ponto $(3;4)$ *está em uma circunferência cujo centro está em* $(-1;2)$. *Determine a da equação desta circunferência.*

Resolução:

Exemplo

Exemplo

O ponto $(3;4)$ *está em uma circunferência cujo centro está em* $(-1;2)$. *Determine a da equação desta circunferência.*

Resolução:
O raio da circunferência ê a distância entre $P_1(3;4)$ e $P_2(-1;2) = (x_0;y_0)$.
$r = \sqrt{[3-(-1)]^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$
Escrevendo a equação da circunferência, tem-se:
$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$
$[x-(-1)]^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{20})^2$ substituir o centro e raio
$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 20$ Equação da Circunferência

Exemplos de aplicação

Exemplo

Uma loja de móveis oferece serviços de entrega gratuita para todos os lugares dentro de um raio de 25km a partir do seu estoque.

1. *Se você vive em um raio de 20km a leste e 14km ao sul do estoque. Você pagará a taxa de entrega? Justifique a sua resposta.*
2. *E se a Khensane vive em um raio de 21km ao norte e 13.8km a oeste do estoque. Pagará a taxa de entrega? Justifique a sua resposta.*

Resolução:
1-NÃO. 2-SIM.

Funções

A maioria das funções são constituidas com base em outras funções, em geral mais simples. Por exemplo, podemos considerar a função $f(x) = 2x + 4$ como soma de duas funções, $g(x) = 2x$ e $h(x) = 4$. A função $g(x) = 2x$ por sua vez, pode ser vista como o produto das funções $p(x) = 2$ e $q(x) = x$.
A formulação matemática de um problema proveniente de uma situação prática frequentemente dá origem a expressões que envolvem a combinação de funções (soma, diferença, produto, quociente ou composição de funções).

Definição (Soma, diferença, produto e quociente)

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções de domínio A e B, respectivamente. Então a **soma, diferença e produto** *de $f(x)$ e $g(x)$ são funções com domínio $A \cap B$, dadas por:*

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Definição (Quociente)

O quociente de f por g é uma função cujo domínio é $A \cap B$, excluindo todos os números x, tais que $g(x) = 0$, e é dado por
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Definição (Composição de funções)

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções. Então a composição de $g(x)$ e $f(x)$ é a função $(g \circ f)(x)$, definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

O domínio de $(g \circ f)(x)$ é o conjunto de todos os x no domínio de $f(x)$ de modo que $f(x)$ pertença ao domínio de $g(x)$.

Exemplo

Sejam as funções $f(x) = x^2 + 3x + 1$ e $g(t) = t^2$. Determine $g \circ f$ e $f \circ g$

Resolução:

1. Determinar $g \circ f$, é assumir a função f como variável de g:
$g \circ f = g(f(x)) = g(x^2 + 3x + 1) = (x^2 + 3x + 1)^2$
2. **Exercício.**

Funções Custo, Receita e Lucro

Seja x a quantidade produzida de um produto. O **custo total** de produção (ou simplesmente **Custo**) depende de x, e a relação entre eles chamamos de **função custo total** ou simplesmente (função custo) e denotamos pela letra **C**.
Existem custos que não dependem da quantidade produzida. Os custos que permanecem mais ou menos constantes independentemente do nível de produção da empresa são chamados **custos fixos**-(C_F), tais como: aluguel, seguros, salários dos efectivos. Por outro lado, os custos que variam com a produção ou vendas são ditos **custos variáveis**-(C_V).

Definição (Custo total)

O **Custo total** *de operação de um negócio é dado pela soma dos custos variáveis com os fixos,* $C(x) = C_V + C_F$.

Definição (Custo médio ou custo unitário)

Seja x a quantidade produzida de um produto. Chamamos de função **Custo médio**-$\bar{C}(x)$ *ao quociente do custo total pela quantidade de unidades produzidas, ou seja,* $\bar{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

O custo médio representa o custo por unidade de produção.

Definição (Receita)

Seja x a quantidade vendida de um produto. Chamamos de função **Receita**-$R(x)$ *ao produto de x pelo preço de venda $p(x)$,* $R(x) = x \cdot p(x)$.

Definição (Lucro)

A função **Lucro**-$L(x)$ *é definida como a diferença da função Receita $R(x)$ e a função Custo $C(x)$, assim teremos:* $L(x) = R(x) - C(x)$

Exemplos

Exemplo (Função Custo)

Suponha que uma fabricante de filtros de água, tem um custo mensal fixo de 100.000*mt e um custo variável em meticais de*

$$-0.001x^2 + 100x; \quad (0 \leq x \leq 40.000),$$

onde x denota o número de filtros fabricados por mês. Determine a função que dá o custo total da fabricante de x filtros

Resolução:

Exemplos

Exemplo (Função Custo)

Suponha que uma fabricante de filtros de água, tem um custo mensal fixo de 100.000*mt e um custo variável em meticais de*

$$-0.001x^2 + 100x; \quad (0 \leq x \leq 40.000),$$

onde x *denota o número de filtros fabricados por mês. Determine a função que dá o custo total da fabricante de* x *filtros*

Resolução:

O custo fixo mensal da fabricante é sempre de 100.000mt, independentemente do nível de produção, sendo descrito pela função $C_F(x) = 100.000$ De outro lado, o custo variável é descrito pela função $C_V(x) = -0.001x^2 + 100x$.

Como o custo total do fabricante em qualquer nível de produção é a soma do Custo variável com o custo fixo, dai que a função **Custo total** é dada por $C(x) = -0.001x^2 + 100x + 100.000$ em meticais.

Exemplo (Receita e Lucro)

Suponha que o preço de fabricantes de filtros na venda de x filtros de água do exemplo anterior é de $p(x) = -0.005x + 200$. *Determine*

1. *A receita total (arrecadação total) na venda de x filtros*
2. *O lucro total obtido na venda de* 1.000 *e* 10.000 *filtros de água*

Resolução:

a) A receita total é o produto do preço de venda pela quantidade de unidades do produto. Tomando em conta as x unidades do produto, tem se $R(x) = p(x) \cdot x = (-0.005x^2 + 200)x = -0.005x^2 + 200x$.
A **receita total** na venda de x filtros é dada por
$R(x) = -0.005x^2 + 200x$.

b) A função **lucro total** é a diferença entre a receita total obtida e o custo total envolvido. Assim, a função lucro total desejada é dada por:

$L(x) = R(x) - C(x)$
$L(x) = (-0.005x^2 + 200x) - (-0.001x^2 + 100x + 100.000)$
$L(x) = -0.004x^2 + 100x - 100.000$ ←**lucro total**

b) A função **lucro total** é a diferença entre a receita total obtida e o custo total envolvido. Assim, a função lucro total desejada é dada por:

$L(x) = R(x) - C(x)$

$L(x) = (-0.005x^2 + 200x) - (-0.001x^2 + 100x + 100.000)$

$L(x) = -0.004x^2 + 100x - 100.000 \leftarrow$**lucro total**

O lucro obtido pela fabricante quando o nível de produção é de 1.000 filtros por mês é

$L(1.000) = -0.004 \cdot (1.000)^2 + 100 \cdot 1.000 - 100.000 = -4.000.$

Significa que: o fabrico de 1000 filtros num mês, produz um prejuízo de 4000 meticais.

$L(10.000) = -0.004 \cdot (10.000)^2 + 100 \cdot 10.000 - 100.000 = 500.000.$

Significa que: O fabrico de 10.000 unidades de filtros num mês produz um lucro correspondente a 500 mil meticais.

ISUTC INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

Ponto de break-even (Ruptura)

Definição (Ponto de equilíbrio operacional ou break-even-Ruptura)

Ponto de equilíbrio operacional *representa a quantidade de vendas necessárias para uma empresa cobrir os custos totais, igualando as receitas e os custos fixos e variáveis,* $R(x) = C(x)$.

O ponto break-even dirá-nos exactamente quantos produtos você precisará produzir e vender para chegar ao ponto de equilíbrio, sem prejuizo nem lucro.

Exemplo

Uma empresa fabrica um produto a um custo de $65mt$ *por unidade e o vende a* $120mt$ *por unidade. O investimento inicial da empresa para produzir o produto foi* $10.000mt$. *Quantas unidades a empresa deve vender para alcançar o ponto de break-even?*

Resolução:
O custo total da produção de x unidades do produto é dado por $C(x) = 65x + 10.000$.
A receita total da venda de x unidades é dada por $R(x) = 120x$.
Para determinar o ponto de equilíbrio, igualemos o custo à receita, e encontremos x.
$R(x) = C(x) \Leftrightarrow 120x = 65 + 10.000 \Leftrightarrow 120x - 65x = 10.000 \Leftrightarrow 55x = 10.000 \Leftrightarrow x = 181.818 \approx 182$
A empresa deve vender 182 unidades para equilibrar as finanças.

Principais modelos económicos

Dois tipos de aplicacções que os economistas utilizam para analisar um mercado são as equações de oferta e demanda. Em uma economia livre do mercado, a demanda de consumo por um determinado bem depende do preço unitário.

A **equação de demanda** expressa a relação entre o preço p da unidade de um produto e a quantidade demandada (solicitada) x. Em geral, a quantidade demandada de um bem cresce à medida que o preço por unidade desse bem decresce, e vice-versa.

O gráfico da equação de demanda é chamado curva de demanda.

O **gráfico de demanda** $p = f(x)$ é uma função decrescente de x.

Uma **equação de oferta** expressa a relação entre o preço p da unidade de um produto e a quantidade fornecida x. O gráfico de uma equação de oferta é chamado **curva de oferta** $p = f(x)$.

Uma curva típica de oferta é crescente porque os produtores de um produto querem vender mais unidades se o preço unitário for mais alto.

Se o preço de um bem for muito alto, o consumidor não comprará e se o preço for muito baixo, o fornecedor não produzirá. Essa condição faz com que o preço de um bem se estabilize eventualmente em dado nível demandado satisfazendo ambas partes. A esse nível ou ponto em que a quantidade produzida é igual a quantidade demandada é denominado por **ponto de equilíbrio do mercado**. A quantidade e o preço que equilibram o mercado são denominados por **quantidade** e **preço** de equilíbro, respectivamente.

Exemplo (Demanda e oferta)

As equações de oferta e demanda para uma certa marca de auriculares são dadas por:
Equação de demanda $p = 1950 - 58x$
Equação de oferta $p = 1500 + 32x$,
em que p *é o preço em meticais e* x *representa o número de unidades em milhões. Determine o ponto de equilíbrio para esse mercado.*

Resolução:

Exemplo (Demanda e oferta)

As equações de oferta e demanda para uma certa marca de auriculares são dadas por:
Equação de demanda $p = 1950 - 58x$
Equação de oferta $p = 1500 + 32x$,
em que p *é o preço em meticais e* x *representa o número de unidades em milhões. Determine o ponto de equilíbrio para esse mercado.*

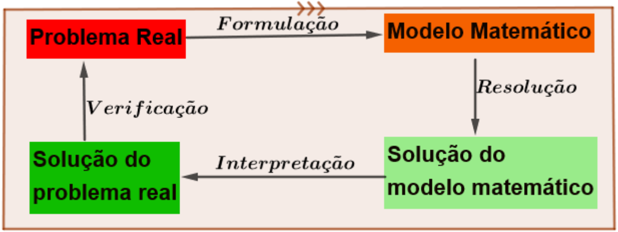
Resolução:
Igualemos as equações de demanda e de oferta
$1500 + 32x = 1950 - 58x \Leftrightarrow 32x + 58x = 1950 - 1500$
$\Leftrightarrow 90x = 450 \Leftrightarrow x = 5$
Portanto, o ponto de equilíbrio ocorre quando a demanda e a oferta forem de 5 milhões de unidades.

O preço que corresponde a esse valor de x é obtido ao substituir em qualquer uma das equações originais.
Por exemplo, a substituição na equação de demanda produz
$p = 1950 - 58 \cdot (5) = 1660$ meticais.
Substitua na equação de oferta para verificar que se obtém o mesmo preço.

Conclusão:
O mercado atinge equilíbrio com a demanda e oferta de 5 milhões de unidades de auriculares ao preço de 1660 meticais.

Modelagem matemática

Um dos principais objectivos desta disciplina é mostrar como a Matemática pode ser utilizada na solução de problemas reais das áreas de administração e gestão.
Indepentemente do campo de conhecimento do qual próvem, o problema é analisado por meio de um processo conhecido como **modelagem matemática**. Os quatro (4) passos deste processo são indicados na figura a seguir.



1. **Formulação:** Dado um problema real, nossa tarefa será reformulá-lo utilizando linguagem matemática.
2. **Resolução:** Após construir o modelo matemático, usamos técnicas matemáticas apropriadas, para resolver o problema.
3. **Interpretação:** Interpretar os resultados ou a solução do modelo matemático no contexto do problema real original.
4. **Verificação:** Verificar a precisão do modelo, observando se os resulatados descrevem da melhor forma o problema inicial, e se esses resultados são aceitáveis ou não. Caso os resultados não sejam satisfatórios, talvez deve-se reconsiderar as suposições feitas no desenvolvimento do modelo, ou no pior cenário, retornar ao primeiro passo.

Ao desenvolver um modelo matemático para representar dados reais, deve-se dar destaque a dois objetivos–precisão e simplicidade.

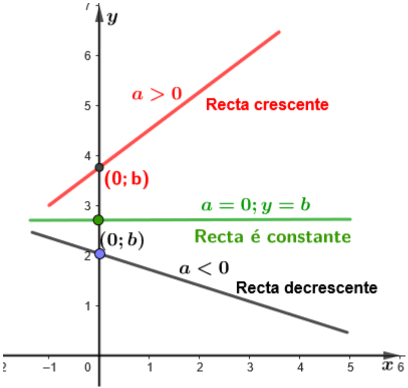
Rectas-Função Linear

O modelo matemático mais simples para relacionar duas variáveis é a **equação linear** $y = ax + b$. A equação é chamada de linear porque seu gráfico é uma recta.
A função linear é amplamente utilizada na modelagem matemática porque alguns modelos são lineares por natureza, outros porque alguns fenômenos naturais apresentam características lineares em uma pequena gama de valores e podem ser modelados por uma função linear restrita em um pequeno intervalo.

Inclinação e interseção

O gráfico da equação $y = ax + b$ é uma recta cuja inclinação ou declive é $\underline{a}$ e cuja interseção com o eixo y é $(0, b)$, onde $\underline{b}$ é a ordenada na origem.

A inclinação de uma recta é o número de unidades que a recta cresce (se $a > 0$) (ou decresce) (se $a < 0$), verticalmente para cada unidade de mudança horizontal da esquerda para a direita.



Definição (Declive de uma recta)

Se $(x_1; y_1)$ e $x_2; y_2$ são dois pontos diferentes em uma recta não vertical, então a declividade (declive ou coeficiente angular) $\underline{a}$ da recta é dada por:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

N.B: Se $x_1 = x_2$ e $y_1 \neq y_2$, então a recta é vertical

Definição (Equação da recta)

Uma equação da recta que tem declive $\underline{a}$ e passa pelo ponto $(x_1; y_1)$ é dada por:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

Em problemas da vida real, a declividade da recta pode ser interpretada como uma **taxa de variação**, isso quando o eixo x e o eixo y apresentarem unidades de medidas diferentes.

Exemplos

Uma equação da recta pode ser obtida através das seguintes possibilidades:

1. Dois pontos diferentes, ou
2. Declividade e um ponto, ou
3. Um ponto e ordenada na origem

Exemplo (1)

Encontre a equação da recta que passa pelos pontos $(-3; 2)$ *e* $(4; -1)$.

Exemplo (2)

Determine a equação da recta que passa pelo ponto $(1; -1)$ *e intersecta o eixo dos* y *em* -4.

Resolução do exemplo 1

A declividade da recta é dada por: $a = \dfrac{-1-2}{4-(-3)} = -\dfrac{3}{7}$

Se escolhermos o ponto $(-3;2)$ como referência, e recorrendo a fórmula da equação, tem-se:

$y - y_1 = a(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = -\dfrac{3}{7}[(x-(-3)] \Rightarrow$

$y = -\dfrac{3}{7}x - \dfrac{9}{7} + 2 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{7}x - \dfrac{5}{7}$

Resolução do exemplo 2

Pelos dados, tem-se que a ordenada na origem, ou seja o valor de $b = -4$. Falta-nos determinar a declividade a. Pela equação $y = ax + b$, podemos substituir as coordenadas do ponto e o valor b. $-1 = a \cdot 1 + (-4) \Rightarrow -1 = a - 4 \Leftrightarrow -1 + 4 = a \Leftrightarrow a = 3$. Logo, rescrevendo a equação temos: $y = 3x - 4$.

ISUTC INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

Exemplo (Declividade como taxa de variação)

Um fabricante determina que o custo total em meticais da produção de x unidades de um produto é $C(x) = 250x + 35.000$ em meticais. Descreva a importância prática da interseção com o eixo y e da inclinação da recta fornecidas por essa equação.

Resolução:

Exemplo (Declividade como **taxa de variação**)

Um fabricante determina que o custo total em meticais da produção de x unidades de um produto é $C(x) = 250x + 35.000$ em meticais. Descreva a importância prática da interseção com o eixo y e da inclinação da recta fornecidas por essa equação.

Resolução:

A interseção com o eixo y $(0; 35.000)$ mostra que o custo de produção de zero unidades é 35.000 mts. Este é o **custo fixo** de produção – que inclui custos que devem ser pagos independentemente do número de unidades produzidas.

A inclinação mostra que o custo de produção de cada unidade é 250mts. Os economistas chamam este custo unitário de **custo marginal**.

Se a produção aumenta em uma unidade, então a "margem" ou montante extra de custo é 250.

Exemplo (Depreciação linear)

Uma pequena empresa compra uma copiadora e determina que o valor contábil da copiadora após t anos de sua compra é $V(t) = -17.500t + 87.500$ em meticais. Descreva o significado prático da interseção com o eixo y e da inclinação da recta fornecidas por essa equação.

Resolução:

Exemplo (Depreciação linear)

Uma pequena empresa compra uma copiadora e determina que o valor contábil da copiadora após t anos de sua compra é $V(t) = -17.500t + 87.500$ *em meticais. Descreva o significado prático da interseção com o eixo y e da inclinação da recta fornecidas por essa equação.*

Resolução:

A interseção com o eixo y é $(0; 87.500)$, o que mostra que o valor da máquina após 0 anos de uso é de 87.500. Este é o valor de compra ou aquisição.

A inclinação é $a = -17.500$, significa que a taxa de depreciação anual da máquina é de 17.500 em meticais.

Limite de uma função

Na linguagem do dia a dia, as pessoas referem-se a limite de velocidade, limite de peso de um lutador, limite de resistência de alguém ou esticar uma mola ao seu limite. Essas frases sugerem que um limite é um limiar, que em alguns casos pode não ser atingido, mas que em outras ocasiões pode ser alcançado ou ultrapassado, mas caso seja ultrapassado, pode causar-nos consequências negativas.

Definição (Definição Intuitiva de Limite)

Seja dada a função $f(t) = \dfrac{4(t^2-4)}{t-2}$. *Suponha que tenhamos de determinar o valor de* $f(t)$ *quando* t *se aproxima ao número* $t = 2$.

t	1.5	1.9	1.999	-	2.001	2.1	2.5
$f(t)$	14	15.6	15.996	-	16.004	16.4	18

ISUTC INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

Limites Laterais

Da tabela, foi visto que uma maneira de avaliar lo imite é quando uma função se aproxima de um valor pela esquerda de $\underline{a}$ e de outro pela direita. Esse tipo de comportamento pode ser descrito de maneira mais concisa pelo conceito de limite lateral.

$\lim\limits_{t \to a^-} f(t) = L$, limite pela esquerda e
$\lim\limits_{t \to a^+} f(t) = L$, limite pela direita.

Lê-se o primeiro desses dois limites como "o limite de $f(t)$, quando t tende a $\underline{a}$ pela esquerda, é L"; e o segundo, "o limite de $f(t)$, quando t tende a $\underline{a}$ pela direita, é L. Pela sequência de valores de t se aproximando de 2 pela direita, ou seja, maiores que 2, vemos que $f(t)$ se aproxima do número 16.

Analogamente, se tomarmos a sequência de valores de t se aproximando de 2 pela esquerda, como $t = 1.5$; $t = 1.9$, $f(t)$ se aproxima do número 16.

Em outras palavras, quando t se aproxima de 2 de qualquer lado, a função se aproxima de 16. nessa situação, diz-se que o limite de $f(t)$ quando t se aproxima de 2 é 16, e escreve-se

$$\lim_{t \to 2} f(t) = \lim_{t \to 2} \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2} = 16$$

Definição (Limite de uma função)

A $f(x)$ tem **limite** *L quando x se aproxima de a, pelos dois lados, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e lê-se: O limite de $f(x)$, quando x tende a $\underline{a}$, é L, ou seja, se e somente se tanto o limite pela esquerda como o pela direita forem iguais a L.*

Propriedades de Limites

Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$

Propriedades de Limites

1. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
2. $\lim_{x \to a} [f(x)]^r = L^r$
3. $\lim_{x \to a} cf(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x) = c \cdot L$
4. $\lim_{x \to a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} f(x) \times g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = L \times M$
6. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$

Formas Indeterminadas

Consideremos o exemplo anterior que determinamos analisando os valores da função para t próximo de $t = 2$. Calculando por via de substituição, vemos que tanto o numerador quanto o denominador da expressão tendem a zero quando t se aproxima a 2, isto é, obtemos uma expressão da forma $[\frac{0}{0}]$. Neste caso, dizemos que o limite da função $f(t) = \lim\limits_{t \to 2} \dfrac{4(t^2 - 4)}{t - 2}$ quando t se aproxima de 2 tem a **forma indeterminada** $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Uma estratégica que pode ser utilizada para resolver esse tipo de problema é a que segue:

Podemos reescrever a expressão factorizada

$$\frac{4(t^2 - 4)}{t - 2} = \frac{4(t - 2)(t + 2)}{t - 2} = 4(t + 2).$$

Limites de Infinito

Após a simplificação dos factores comuns, é equivalente a $4(t+2)$, já que $t \neq 2$. Em seguida, substituímos e obtemos:

$$\lim_{t\to 2} f(t) = \lim_{t\to 2} \frac{4(t^2-4)}{t-2} = \lim_{t\to 2} 4(t+2) = 4(2+2) = 16.$$

Limites de Infinito

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$ e desejamos determinar o que acontece com $f(x)$ quando x cresce sem limites.

Preenchendo a tabela, tem-se:

x	1	5	10	100	1.000	100.000
$f(x)$	1	1,92	1,98	1,9998	1,999998	1,9999999998

Com base na tabela, vemos que, à medida que x cresce cada vez mais, $f(x)$ tende cada vez mais a 2. Nessa situação, dizemos que o limite da função $f(x)$, quando x cresce além de qualquer limite, é igual a 2. E escrevemos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = 2$$

Exemplo (Comparação de limites laterais)

Um serviço de entrega noturna custa 120mt ao primeiro quilograma e 20mt por quilograma adicional. Suponha que x represente o peso de um pacote e que $f(x)$ represente seu custo de envio

$$f(x) = \begin{cases} 120, & se \quad 0 < x \leq 1 \\ 140, & se \quad 1 < x \leq 2 \\ 160, & se \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Mostre que o limite de $f(x)$ quando $x \to 2$ não existe.

Resolução: Esboce o gráfico.
O limite de $f(x)$ quando x tende a 2 pela esquerda é $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 140$ enquanto que o limite de $f(x)$ quando x tende a 2 pela direita é $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 160$ Como esses limites laterais não são iguais, o limite de $f(x)$ quando não existe, ou seja, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \nexists$

Exemplo (Função ilimitada)

Determine o limite (se possível) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{x-2}$

Resolução: $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$
Como f é ilimitada quando x tende a 2, o limite não existe.
Podemos perceber que $f(x)$ diminui ilimitadamente quando x tende a 2 pela esquerda; e $f(x)$ aumenta ilimitadamente quando x tende a 2 pela direita.

Exemplo (Aplicação: Função Custo médio)

Uma empresa tem uma linha de mesas para executivos. Estima-se que o custo total de fabricação de x mesas de certo modelo é de $C(x) = 10.000x + 20.000.000$ *meticais por ano. Calcule* $\lim\limits_{x\to\infty} \bar{C}(x)$ *e interprete o resultado.*

Resolução:

$$\lim_{x\to\infty} \bar{C}(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{C(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{10.000x + 20.000.000}{x} =$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(10.000 + \frac{20.000.000}{x}\right) = 10.000 + \frac{20.000.000}{\infty} =$$
$$10.000 + 0 = 10.000$$

A medida que o nível de produção cresce, o custo médio por mesa produzida diminui sensivelmente. Ou seja, o custo médio aproxima-se de um valor constante de 10.000mt por mesa.

INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

Continuidade de Funções

O significado do termo "contínuo", em matemática, é praticamente o mesmo que o da linguagem do dia a dia. Dizer que uma função é contínua em $\underline{a}$ significa que não há interrupção no gráfico de f em $\underline{a}$. O gráfico de f é ininterrupto em $\underline{a}$ e não há buracos ou saltos.

Definição (Continuidade de uma função num ponto)

Uma função f é **contínua no ponto** $x = a$ *se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. $f(a)$ *está definida, ou seja, a função* f *está definida em* $\underline{a}$
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe*
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Portanto, uma função f é contínua no ponto $x = a$ se o limite de f naquele ponto existe e é igual a $f(a)$. Se f não é contínua em $x = a$, então dizemos que f é descontínua em $x = a$.

Propriedades de Continuidade

Suponha que $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em $x = a$

Propriedades de Continuidade

1. A função constante $f(x) = c$ é contínua em todos pontos
2. A função identidade $f(x) = x$ é contínua em todos pontos
3. $[f(x)]^n$, onde $n \in \mathbb{R}$ é contínua em $x = a$ se estiver definida em $x = a$
4. $f(x) \pm g(x)$ é contínua em $x = a$
5. $f(x) \times g(x)$ é contínua em $x = a$
6. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ é contínua em $x = a$, desde que $g(a) \neq 0$.

Exemplos

Exemplo

Discuta a continuidade de $f(x) = \begin{cases} x+2, & se \quad -1 \leq x < 3 \\ 14 - x^2, & se \quad 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$

Exemplo (**Conscientização do consumidor**)

O custo C em meticais) para fazer x cópias em uma loja de fotocópias é dado abaixo. $C(x) = \begin{cases} 1,5x, & se \quad 1 \leq x < 25 \\ 1,0x, & se \quad 25 \leq x \leq 100 \\ 0,75x, & se \quad 100 < x < 500 \\ 0.5x, & se \quad x > 500 \end{cases}$

1. *Em quais valores a função não é contínua?*
2. *Determine o custo para se fazer 24, 100, 450 e 572 cópias*

Obrigado pela Atenção!!!

Referências Bibliográficas

- TAN, S.T. (2014). Matemática aplicada a economia e administração. Cengage learning. São Paulo.
- LARSON, R. (2010). Cálculo aplicado. Cengage learning. São Paulo.
- MORETTIN, P. et all. Cálculo - Funções de uma e de várias variáveis. Editora Saraiva. Brasil.